Tutorial Fluxion

Einleitung

In diesem Tutorium wollen wir das Programm Fluxion vorstellen und beispielhaft aufzeigen, wie man dieses Programm bei der Untersuchung eines elektrischen Schwingkreises einsetzen kann. Dieses Tutorium soll eine Ergänzung zu dem Video-Tutorial sein. Es wird daher empfohlen sich vor dem Lesen dieses Textes mit Hilfe des Videos mit Fluxion vertraut zu machen. Bevor wir beginnen sei noch darauf hingewiesen, dass alle Funktionen der Programme Newton II, Lagrange, sowie Fluxion gleich sind und somit übertragen werden können. Die Programme unterscheiden sich grundsätzlich nur in dem Lösungsansatz, welcher mit diesen verfolgt wird. Daher werden hier einige Aspekte der Programme, welche bereits im Online-Tutorial von Newton II aufgegriffen wurden nicht weiter behandelt. Bei Fragen zu diesen empfehlen wir das Online-Tutorial für Newton II.

Fluxion ist ein nummerisches Berechnungsprogramm, mit dem man Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung untersuchen kann. Da sich gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung überführen lassen, kann man mit Hilfe von Fluxion hierdurch also auch gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung lösen. Die Ordnung der gewöhnlichen Differentialgleichung gibt hierbei, die Anzahl der Differentialgleichungen erster Ordnung in dem überführten System, also die Dimension dieses Systems, an. Beispielsweise kann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden. Im Folgenden wollen wir anhand des Beispiels elektrischer Schwingkreis aufzeigen, wie mit Hilfe der physikalischen Größen des Schwingkreises eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Fluxion löst und zudem einige Funktionen von Fluxion vorstellen.

Elektrischer Schwingkreis mit Fluxion

Wir wollen zunächst einen Schwingkreis betrachten, welche keine externe Stromquelle besitzt. Nach der zweiten Kirchhoff'schen Maschenregel addieren sich die Spannung, die an den einzelnen Bauteilen abfallen zu Null, das heißt es gilt:

$$U_R + U_C + U_L = 0 \qquad \text{(I)}$$

Wir setzen nun die bekannten Ausdrücke der jeweiligen Spannung bezüglich der Stromstärke oder Ladung in die Gleichung ein und erhalten:

$$R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot I' = 0 \qquad \text{(II)}$$

Da wir wissen, dass $I = Q'$ gilt ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$L \cdot Q'' + R \cdot Q' + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \text{(III)}$$

Wir wollen nun diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung überführen. Hierfür verwenden wir als erste Differentialgleichung die Beziehung zwischen Stromstärke und Ladung I=Q'. Somit erhalten wir mit der ursprünglichen Differentialgleichung das zu lösende System:

$$Q' = I \qquad \text{(IVa)}$$
$$L \cdot I' + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \text{(IVb)}$$

Für die Eingabe in Fluxion müssen wir nun noch jeweils nach der ersten Ableitung der Variable auflösen und erhalten als Eingabe:

$$Q' = I \qquad \text{(Va)}$$
$$I' = -\frac{R}{L} \cdot I - \frac{1}{LC} \cdot Q \qquad \text{(Vb)}$$

Wir geben die Gleichungen (Va) und (Vb) in das Eingabefenster von Fluxion ein und erstellen für die Parameter des Systems C, L und R jeweils passende Schieberegler um deren Einfluss auf das System im späteren besser untersuchen zu können. Nun wählen wir die Startwerte des Systems so, dass am Anfang im Schwingkreis kein Strom fließt, der Kondensator, aber vollständig geladen ist, das heißt die Ladung hat als Anfangswert eine feste Größe, während die Stromstärke zu Beginn gleich Null ist. Die Abbildung 1 zeigt die Eingabe und Lösung des elektrischen Schwingkreises mit Fluxion, wie zuvor beschrieben.

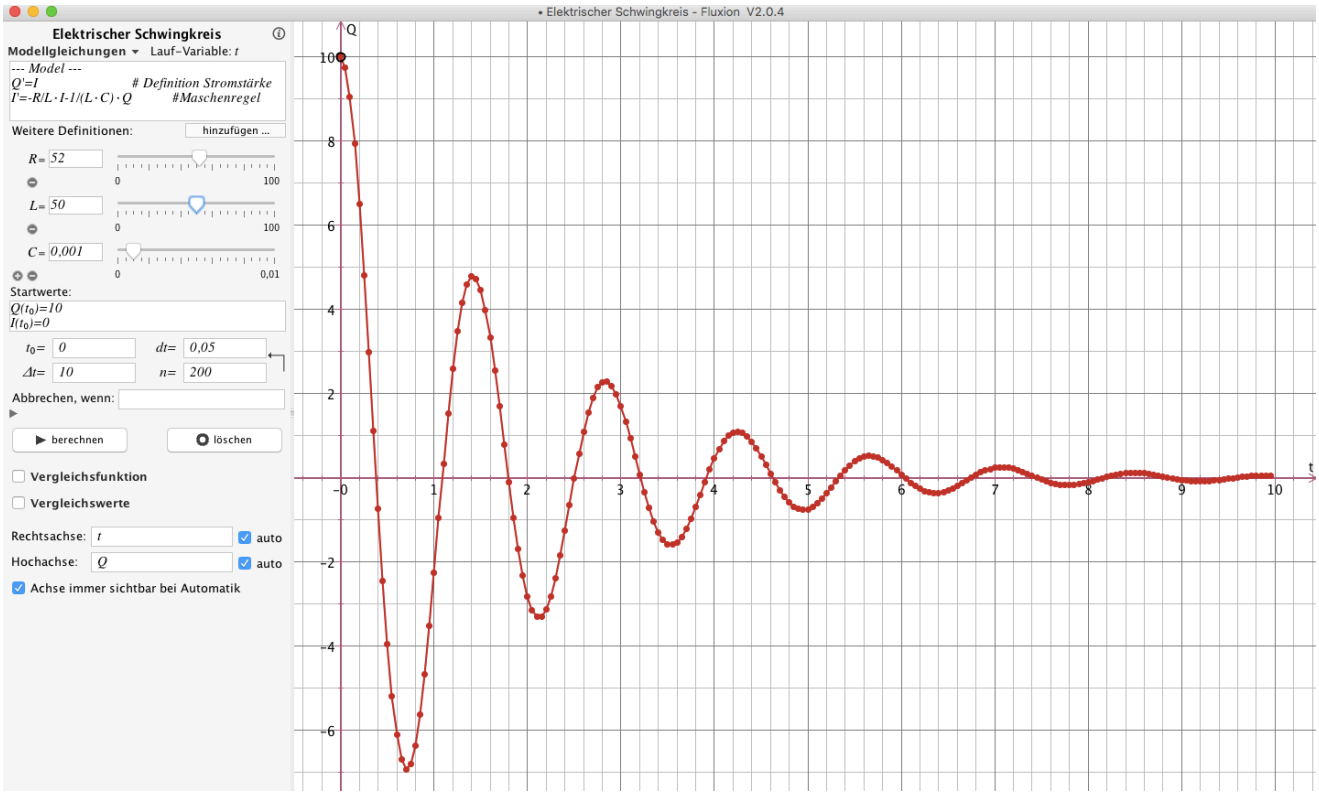


Abbildung 1: Eingabe und Lösung des elektrischen Schwingkreises mit Fluxion

Die Lösungskurve zeigt uns eine gedämpfte Schwingung. Dieses Beispiel zeigt durch Veränderung der Schieberegler auch den ungedämpften Fall, aperiodischen Grenzfall, sowie den Kriechfall. Mittels der Kirchhoff'schen Maschenregel lässt sich das Beispiel zudem leicht um eine externe Spannungsquelle erweitern.

Wir wollen im Folgenden das physikalische Beispiel elektrischer Schwingkreis nutzen um einige weitere Funktionen von Fluxion zu diskutieren.

Kommentieren und Dokumentieren

Zunächst wollen wir beschreiben, wie man durch Kommentare die Eingabe in Fluxion übersichtlich gestaltet. Dies haben wir bereits in Abbildung 1 genutzt, wollen es nun aber noch einmal verdeutlichen. Hierfür betrachten wir das in Abbildung 2 dargestellte Eingabefeld von Fluxion.

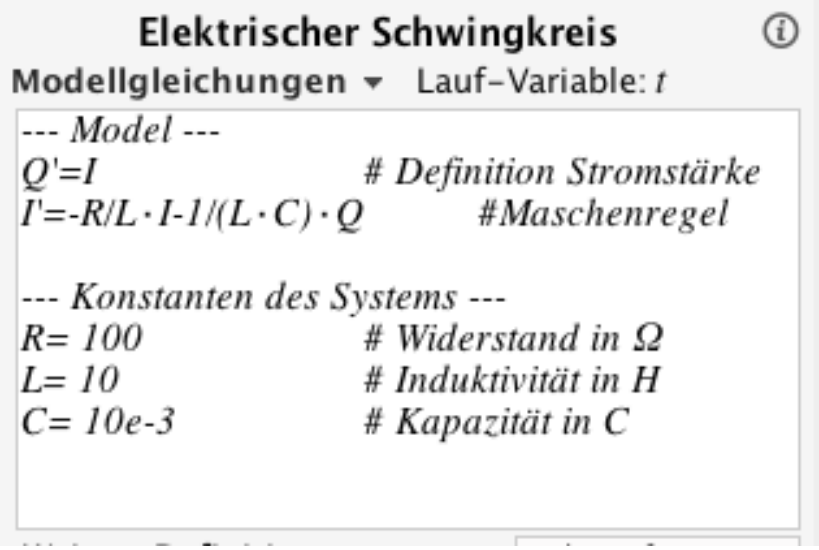


Abbildung 2: Eingabe in das Definitionentextfeld von Fluxion mit Kommentaren.

Wir haben hier zwei Funktionen zum Kommentieren des Textfeldes benutzt. Dies sind zum einen Bindestriche und zum anderen Rauten. Die Bindestriche könnt ihr, wie oben dargestellt, nutzen um Überschriften zu setzen. Hierfür müsst ihr nur drei Bindestriche, also „---“, hintereinander setzen um den Kommentar zu beginnen. Der Beginn einer neuen Zeile beendet die Kommentarfunktion. Die drei abschließenden Bindestriche haben also nur eine kosmetische Funktion um die Eingabe schöner zu gestalten. Ebenso könnt ihr mit Hilfe eines Rauten-Zeichens „#“ kommentieren. Dieses eignet sich vor allem um Kommentare für eine Zeile der Eingabe zu schreiben. Nach dem Beginn einer neuen Zeile ist die Kommentarfunktion wiederum aufgehoben. Durch das Setzen der Kommentarzeichen ignoriert Fluxion also alle Zeichen nach diesem bis eine neue Zeile anfängt. Wie in Abbildung 2 dargestellt, könnt ihr das Nutzen um die Eingabe zu gliedern und übersichtlicher zu gestalten, sowie um eine kurze Dokumentation zur Eingabe anzugeben.

Es ist auch möglich eine umfassendere Dokumentation in Fluxion zu betreiben. Hierfür kann das in Abbildung 3 gezeigte Textfeld geöffnet werden, indem man auf den Informations-button neben dem Namen des Dokumentes klickt.

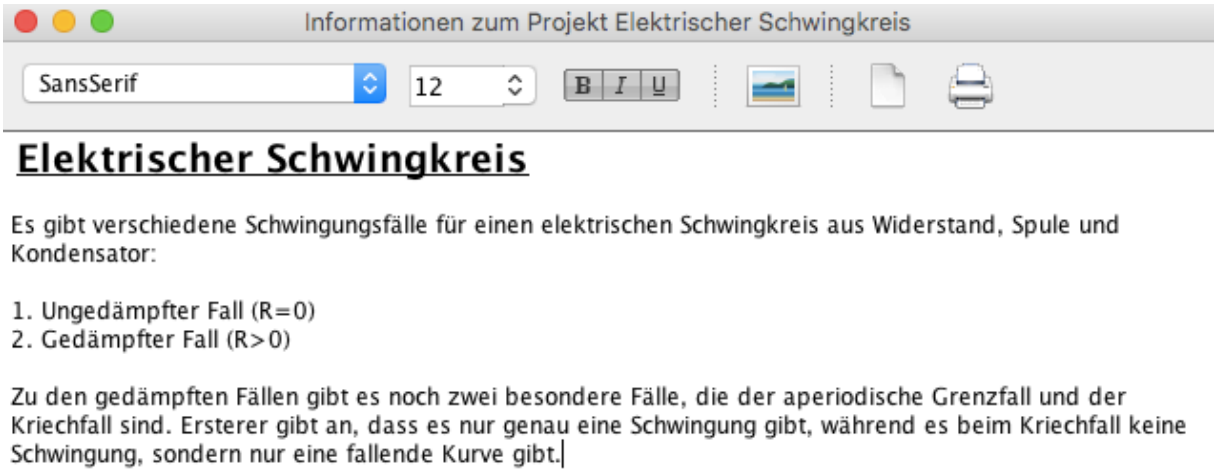


Abbildung 3: Dokumentation eines Fluxion-Projektes.

In dieses Textfeld können zudem auch Bilder eingefügt sowie das Format des Textfeldes geändert werden. Außerdem kann die Dokumentation auch gedruckt werden. Diese Dokumentation kann zum Beispiel dazu benutzt werden Informationen über das Fluxion-Projekt zu speichern oder eine Aufgabe für das Projekt festzuhalten.

Einsatz von Tabellenfunktionen und Funktionen

Wie wollen nun noch das Beispiel des elektrischen Schwingkreises erweitern um an diesem den Einsatz von Tabellenfunktionen und Funktionen zu erläutern. Als Erweiterung schließen wir eine Wechselspannungsquelle an den Schwingkreis an, sodass wir einen angeregten Schwingkreis erhalten. Physikalisch ändert sich hierdurch die Zusammensetzung der Gesamtspannung des Kreislaufes, sodass die externe Spannung $U_{ext} = U_0 \cos(\omega \cdot t)$, die den Schwingkreis zugeführt wird in der Maschenregel berücksichtigt werden muss. Hierdurch ergibt sich für das Modell, die folgenden Gleichungen:

$$Q' = I \tag{VIa}$$

$$I' = -\frac{R}{L} \cdot I - \frac{1}{LC} \cdot Q - \frac{U_0}{L} \cos(\omega \cdot t) \tag{VIb}$$

Wir nehmen nun noch an, dass sich der Widerstand und die Kapazität abhängig von der Zeit sind. Dies wollen wir in Fluxion durch einen funktionalen Zusammenhang des Widerstandes und durch eine Tabellenfunktion für die Kapazität einfügen.

Betrachten wir zunächst den Widerstand. Nehmen wir, dass es bei diesem um einen Heißleiter handelt. Bei der Inbetriebnahme des Schwingkreises erhitzt sich der Widerstand und dadurch verringert sich der Wert des Widerstandes. Um die Verständlichkeit zu wahren und nicht zu tief in die Festkörperphysik eintauchen zu müssen, nehmen wir an, dass der zeitliche Verlauf einer einfachen fallenden Exponentialfunktion folgt:

$$R(t) = 100e^{-t} + 50 \tag{VII}$$

Durch die in Gleichung (VII) definierte Funktion fällt der Widerstand während der ersten 20 s von 150 Ω auf 50 Ω. Dies ist wie erwähnt keine gute Näherung, allerdings soll sie uns nur dazu dienen, die Eingabe von Funktionen in Fluxion zu verdeutlichen. Um eine Funktion zu definieren öffnen wir das Fenster „bearbeiten“ bei weiteren Definitionen. Durch das Drücken des Plus unten links im Fenster lassen sich neue Definitionen hinzufügen. Man kann dann den

Namen neu definieren und die Art der Definition auswählen. Wir nennen unsere Funktion RR und wählen die Option Funktion aus. Es erscheint dann das, in Abbildung ???, dargestellte Fenster, in dem wir die Definition aus Gleichung (VII) eintragen.

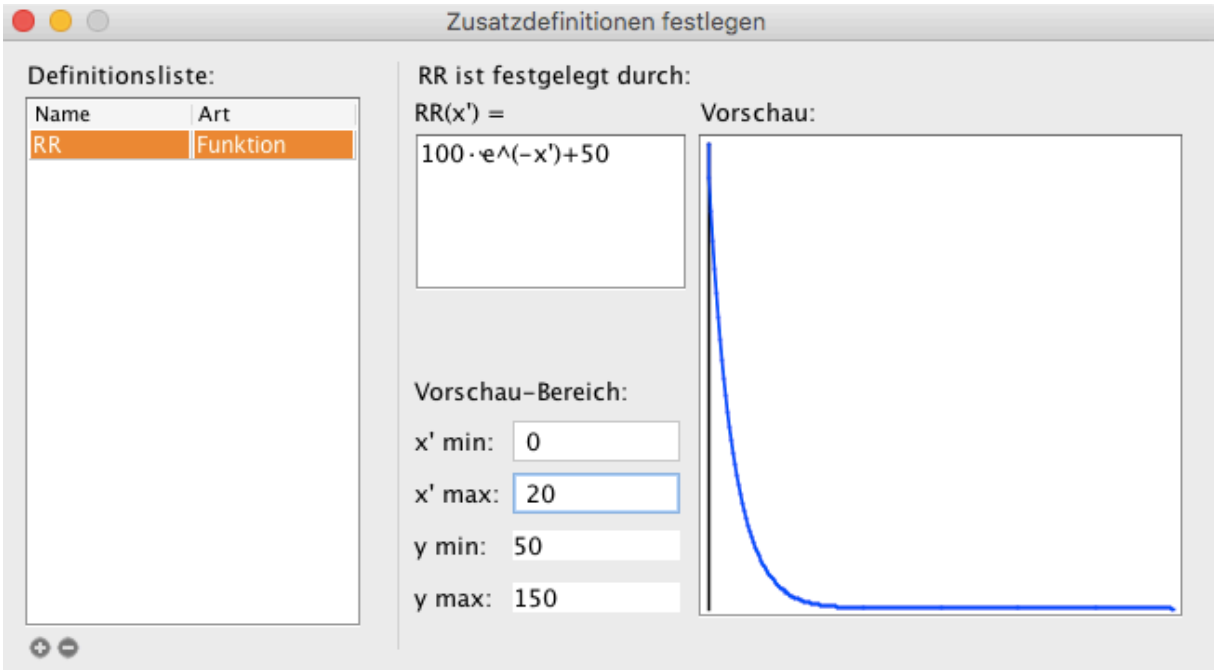


Abbildung 4: Dialogfenster zur Definition der Funktion RR in Fluxion.

Wichtig ist zu beachten, dass die Variable der Funktion x' ist, sodass man in der Definition auch diese Variable benutzt. In der Definition der Funktion können auch fest oder durch Schieberegler definierte Konstanten eingebaut werden, sodass sich auch die Definition der Funktion dynamisch ändern kann. Interessant ist auch der Vorschau-Bereich, da man hier einen Einblick davon erhält, wie sich die Funktion in dem interessanten Bereich verhält. Beim Öffnen der Definition ist dieser immer auf den Bereich zwischen $x'min = -10$ und $x'max = 10$ voreingestellt. Da wir unser Modell in dem Zeitbereich zwischen 0 s und 20 s lösen wollen, haben wir in Abbildung 4 auch diesen Bereich dargestellt. In Fluxion können wir nun die Funktion im Definitionentextfeld verwenden, indem wir der Funktion entweder die richtige Variable, in unserem Fall also $RR(t)$, zuordnen. Dies ist in der Eingabe in Abbildung 8 dargestellt. Zudem können wir auch Funktionswerte aus der Funktion herauslesen. Beispielsweise könnte man in unserem Beispiel einen festen Widerstand R_1 definieren durch $R_1 = RR(0)$. Dies wäre also der Startwert der Funktion RR bzw. der Widerstandswert bei 0 s.

Wir wollen nun noch die Kapazität als Tabellenfunktion definieren. Hierfür fügen wir bei den weiteren Definitionen die Tabellenfunktion CC wie in Abbildung 5 dargestellt ein. Die Tabellenfunktionen sind ein gutes Werkzeug um experimentell gemessene Daten einzufügen. Man kann auch die angegebenen Messdaten von Bauteilen in das Modell einzubauen. So kann man die eigenen Modelle realitätsnah simulieren. In unserem Beispiel ist die Kapazität spannungsabhängig und folgt dem Verlauf der externen Spannung.

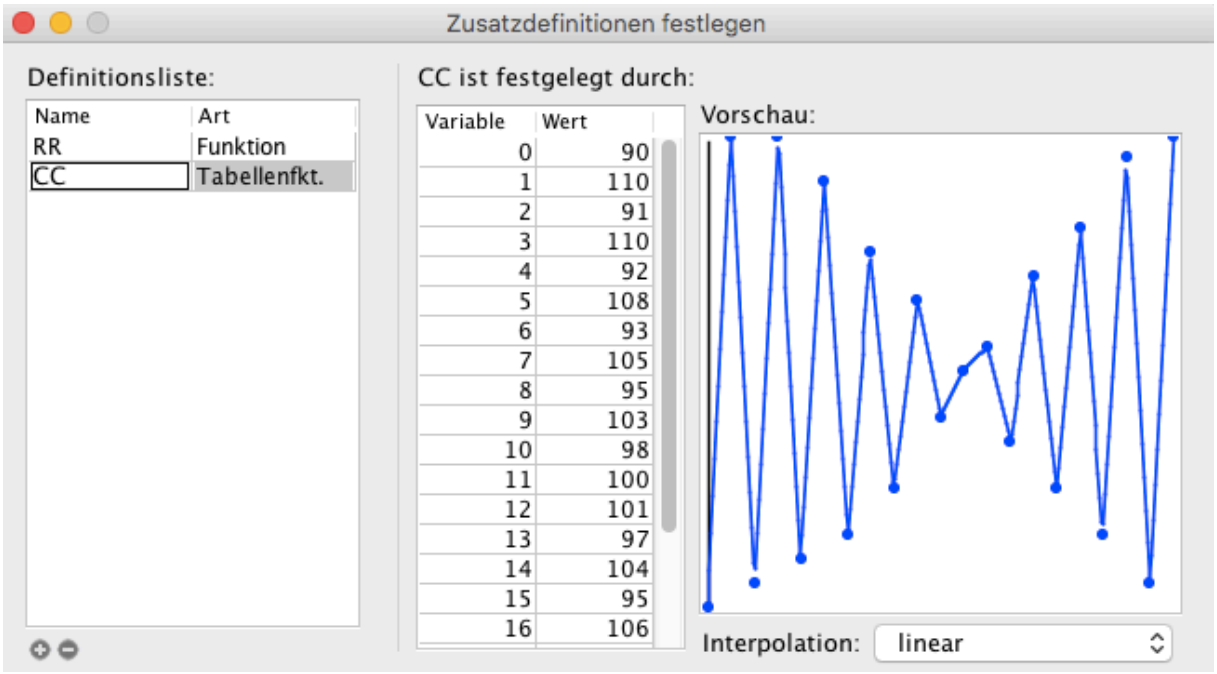


Abbildung 5: Dialogfenster zur Definition der Tabellenfunktion CC mit linearer Interpolation.

Um eine Tabellenfunktion anzugeben, gibt man nur einige Wertepaare an. Fluxion interpoliert dann die Funktionswerte zwischen den angegebenen Stützstellen, dass die Funktion für die Simulation benutzt werden kann. Für das Interpolieren stehen drei Funktionentypen zur Verfügung: lineare Funktionen, Polynome und kubische Splines. In der Abbildung 5 ist eine lineare Interpolation dargestellt. Hier werden zwei benachbarte Stützstellen benutzt um eine lineare Funktion zwischen diesen beiden zu modellieren. Diese Interpolation benötigt sehr viele Interpolationsstellen um eine hohe Genauigkeit zu erzielen. Zudem erhält man nicht-differenzierbare, also eckige, Funktionen, welche wiederum nicht realitätsnah sind. Allerdings benötigt die Interpolation eine geringe Rechenleistung.

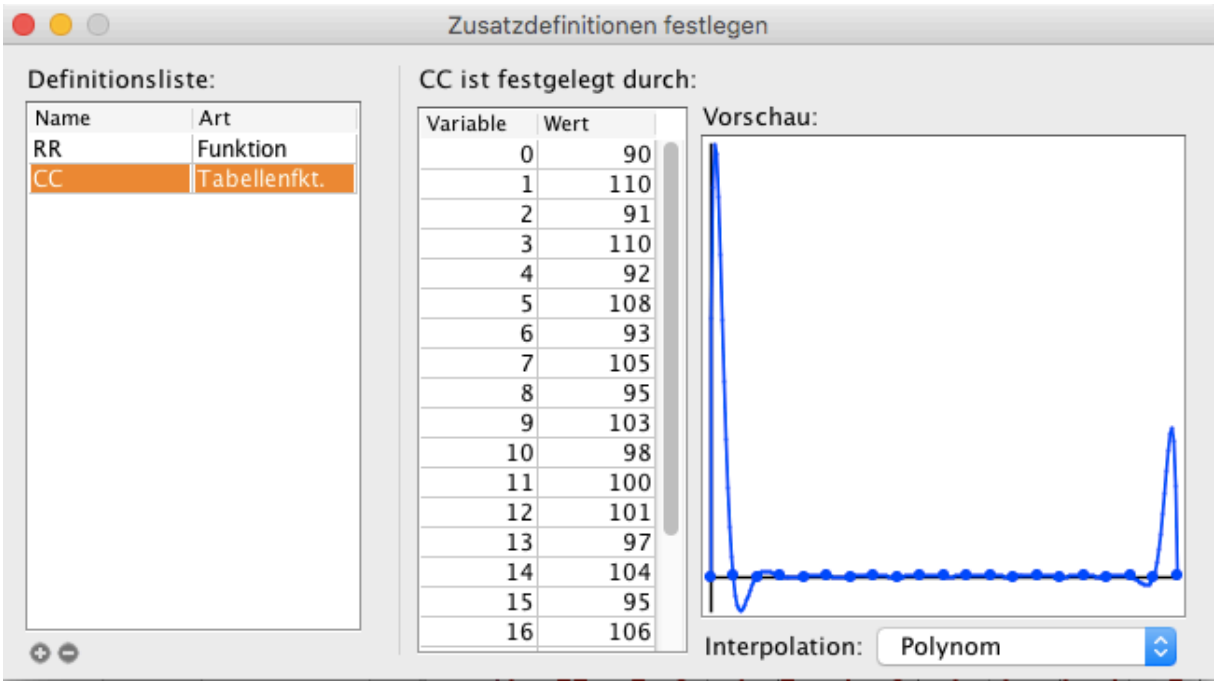


Abbildung 6: Tabellenfunktion mit Polynom-Interpolation.

Benutzt man Polynome zur Interpolation, so benutzt Fluxion die Stützstellen um ein Polynom zu modellieren, welches durch alle Stützstellen geht. Vor allem bei Zusammenhänge, bei dem ein Polynom zugrunde liegt, ist dieses Verfahren sehr gut geeignet. Allerdings kann das gefundene Polynom auch sehr starken Schwankungen unterliegen. Abbildung 6 zeigt die selbe Tabellenfunktion mit einer Polynom-Interpolation. Hier sieht man sehr gut, dass das Polynom zwischen den ersten und letzten beiden Stützstellen sehr stark abweicht. Als letzte Möglichkeit kann man noch kubische Splines zur Interpolation benutzen. Hier werden kubische Funktionen, also Polynome vom Grad 3, benutzt um die Werte zwischen zwei Stützstellen zu modellieren. An den Stützstellen werden die kubischen Funktionen so aneinandergefügt, dass die diese in den Funktionswerten, sowie den Werten der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen. Hierdurch sind die Interpolationsfunktionen differenzierbar und somit glatt. Allerdings benötigt dieses Verfahren auch die meiste Rechenleistung. Abbildung 7 zeigt die Interpolation mit kubischen Splines.

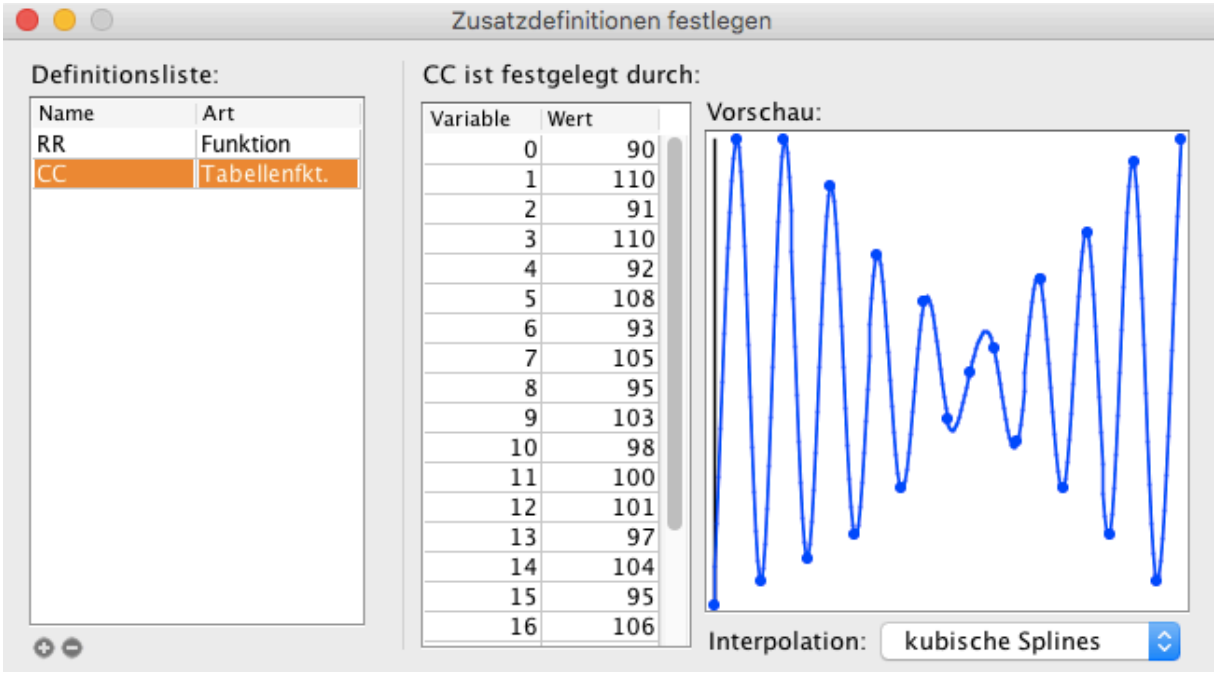


Abbildung 7: Tabellen Funktion mit einer Interpolation durch Splines.

Um die Tabellenfunktion in die Modellierung einzufügen, können wir Funktionswerte definieren, zum Beispiel definiert $C_1 = CC(0)$ den Anfangswert der Kapazität, also den Wert der Tabellenfunktion zum Zeitpunkt 0 s. Außerdem können wir die vollständige Abhängigkeit einbauen hierfür müssen wir wiederum die abhängige Variable angeben durch $CC(t)$. Da es sich bei Kapazitäten um sehr kleine Werte handelt, haben wir bei der Definition der Kapazität die Zehnerpotenz erst nach der Interpolation der Tabellenfunktion hinzugefügt. Dies erleichtert die Interpolation für das Programm, da die sehr kleinen Kapazitätswerte sonst zu großen Fehlern in der Interpolation führen könnten. Die Abbildung 8 zeigt nun die Eingabe und das Ergebnis des Models. Wir können nach einem kurzen Einschwingvorgang eine Bifurkation, also chaotisches Verhalten des Schwingkreises beobachten.

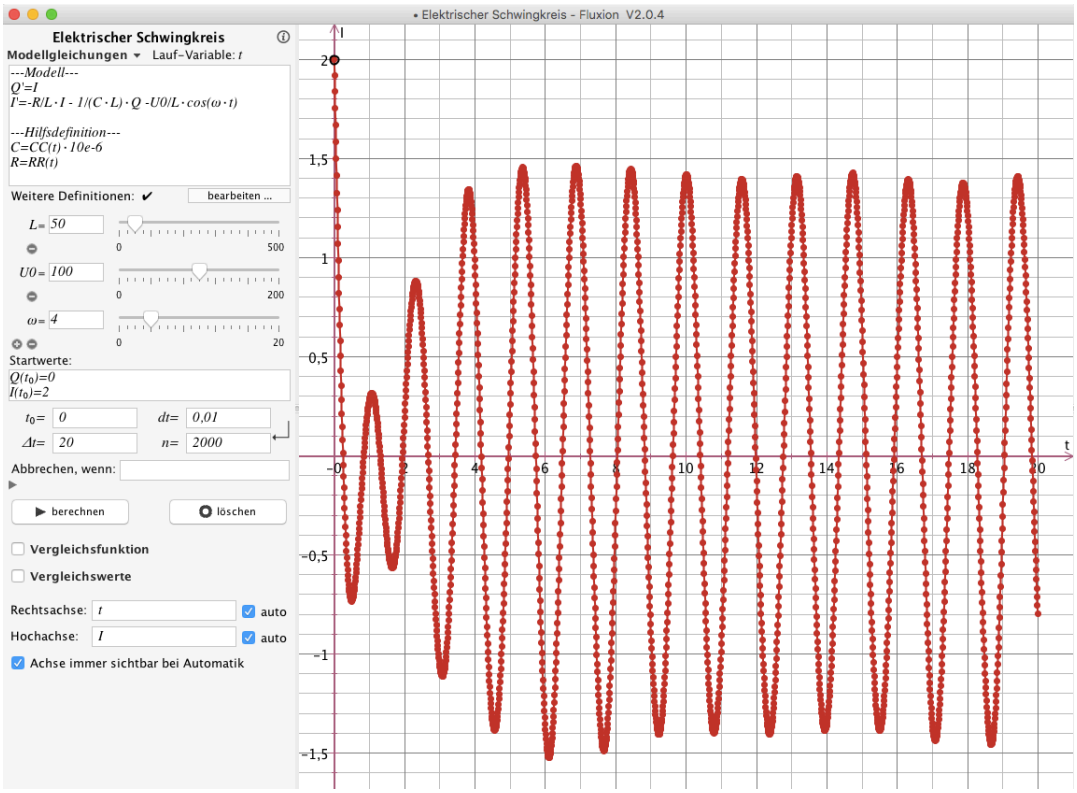


Abbildung 8: Elektrischer Schwingkreis mit externer Spannungsquelle und nichtlinearen Widerstand sowie Kapazität.